



Technical Note GKSS/WMS/02/01

internal report

FEM-Analysen von Rissproblemen bei nichtlinearem Materialverhalten

DVM-Weiterbildungsseminar
"Anwendung numerischer Methoden in der Bruchmechanik"
Freiberg, 18.02.02

W. Brocks

Februar 2002

Institut für Werkstofforschung
GKSS-Forschungszentrum Geesthacht

FEM-Analysen von Rissproblemen bei nichtlinearem Materialverhalten

Wolfgang Brocks
GKSS-Forschungszentrum Geesthacht

INHALT:

1. Nichtlineare FE-Analysen
 - 1.1 Geometrische Nichtlinearitäten
 - 1.2 Physikalische Nichtlinearitäten

2. FE-Netze in der Umgebung von Spannungskonzentratoren
 - 2.1 Singuläre isoparametrische Elemente
 - 2.2 Beispiel 1: C(T)-Probe
 - 2.3. Beispiel 2: Kreuzprobe
 - 2.4. Beispiel 3: Rohrknoten mit Schweissnahttriss

3. Ermittlung von Bruchkennwerten
 - 3.1. Spannungsintensitätsfaktoren
 - 3.2. Das J -Integral
 - 3.3. Die Rissspitzenöffnung CTOD und der Rissöffnungswinkel CTOA

4. Danksagung

5. Literatur

1. Nichtlineare FE-Analysen

Nicht-lineares Systemverhalten wird inkrementell behandelt. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf quasi-statische Prozesse, d.h. es herrscht Gleichgewicht in jedem Zustand. Zur Beschreibung der Belastungsgeschichte wird ein monoton zunehmender Parameter, die "Zeit" $t \geq 0$ eingeführt. Ausgehend von einem als bekannt vorausgesetzten (im vorangegangenen Schritt berechneten) Gleichgewichtszustand zur Zeit t

$$\delta A(t) - \delta W(t) = 0 \quad (1.1)$$

wird der neue Gleichgewichtszustand zur Zeit $t+\Delta t$

$$\delta A(t + \Delta t) - \delta W(t + \Delta t) = 0 \quad (1.2)$$

durch Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeiten für einen Belastungszuwachs während Δt berechnet:

$$t \rightarrow t + \Delta t: \quad \delta \Delta A - \delta \Delta W = 0 . \quad (1.3)$$

Dabei ist

$$\delta A = \int_{\partial V} t_j \delta u_j dA + \int_V \rho b_j \delta u_j dV \quad (1.4)$$

die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte (t_i = Oberflächenkräfte, b_i = Volumenkräfte) und

$$\delta W = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (1.5)$$

die virtuelle Arbeit der inneren Spannungen (virtuelle Verzerrungsenergie).

Entsprechend enthält das FEM-Gleichungssystem als Unbekannte die Verschiebungszuwächse während Δt anstelle der Gesamtverschiebungen:

$$\underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{u}}) \Delta \underline{\mathbf{u}} = \Delta \underline{\mathbf{f}}^1. \quad (1.6)$$

Das Gleichungssystem (1.6) ist nichtlinear, weil die Systemsteifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ von den (unbekannten) Verschiebungen $\underline{\mathbf{u}}(t+\Delta t)$ abhängt. Nichtlinearitäten können sein

- geometrische Nichtlinearitäten: große Deformationen,
- physikalische Nichtlinearitäten: nicht-lineares Stoffgesetz.

1.1 Geometrische Nichtlinearitäten

Im Falle großer Deformationen, bei denen die Änderungen der geometrischen Konfiguration der Struktur in die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen bzw. des Prinzips der virtuellen Arbeiten eingeht, können die Zustandsgrößen entweder

¹ unterstrichene Symbole bezeichnen Matrizen

- auf die (meist undeformierte) Ausgangskonfiguration zur Zeit $t=0$: Total-LAGRANGESche (TL) Formulierung (GREENSche Verzerrungen und 2.PIOLA-KIRCHHOFFSCHE Spannungen), oder
- auf die im vorhergehenden Schritt zur Zeit t berechnete (deformierte) Konfiguration: Updated-LAGRANGESche (UL) Formulierung (also für $\Delta t \rightarrow 0$: ALMANSISCHE Verzerrungen und CAUCHYSche Spannungen)

bezogen werden (GADALA et al. [1980], Bathe [1996]). Entsprechend sind die dem Programm einzugebenden Materialwerte (z.B. die einachsige Fließkurve) zu formulieren.

In den folgenden Gleichungen bezeichnet ein Index am Symbol der jeweiligen Zustandsgröße,

- links oben den "Wirkungszustand",
- links unten den "Referenzzustand".

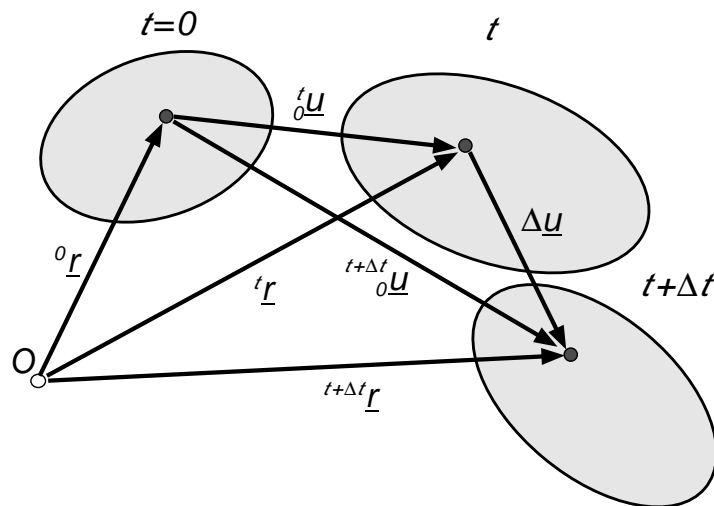


Bild 1-1: Kinematik großer Deformationen

Die Konfiguration zur Zeit $t+\Delta t$ wird durch die Ortsvektoren der materiellen Punkte

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{r} = {}^0 \mathbf{r} + {}^{t+\Delta t} {}^0 \mathbf{r} = {}^t \mathbf{r} + \Delta \mathbf{u} \quad (1.7)$$

beschrieben, siehe Bild 1-1. Die Gesamt-Verschiebungen vom Referenzzustand $t=0$ bis $t+\Delta t$ sind

$${}^{t+\Delta t} {}^0 \mathbf{u} = {}^t {}^0 \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \quad (1.8)$$

und die Gesamt-Verzerrungen (GREENSche quadratische Verzerrungen)

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} {}^0 \mathbf{E}^{(G)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} {}^0 \mathbf{u}}{\partial {}^0 \mathbf{r}} \right) + \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} {}^0 \mathbf{u}}{\partial {}^0 \mathbf{r}} \right)^T + \left(\frac{\partial {}^t {}^0 \mathbf{u}}{\partial {}^0 \mathbf{r}} \right) \cdot \left(\frac{\partial {}^t {}^0 \mathbf{u}}{\partial {}^0 \mathbf{r}} \right)^T \right] \\ &= {}^{t+\Delta t} {}^0 \mathbf{E} + {}^{t+\Delta t} {}^0 \mathbf{G} . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die weiteren Betrachtungen beschränken sich auf die **Updated LAGRANGESche** Formulierung, mit dem Referenzzustand t . Die Spannungsänderung während Δt ist

$${}^{t+\Delta t}_i \mathbf{S} = {}^t_i \mathbf{S} + \Delta_t \mathbf{S} = {}^t \mathbf{T} + \Delta_t \mathbf{S} \quad (1.10)$$

mit \mathbf{S} als 2. PIOLA-KIRCHHOFFSchen und \mathbf{T} als CAUCHYSchem Spannungstensor, und die entsprechende Verzerrungsänderung

$${}^{t+\Delta t}_i \mathbf{E}^{(G)} = \Delta_t \mathbf{E}^{(G)} \approx \Delta_t \mathbf{E} \quad (1.11)$$

mit \mathbf{E} als linearem Verzerrungstensor.

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte (bei Beschränkung auf Oberflächenkräfte) während Δt ist

$$\delta \Delta A = \int_{\partial'V} {}^{t+\Delta t}_i \mathbf{t} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}_i \mathbf{u} dA = \int_{\partial'V} \Delta \mathbf{t} \cdot \delta \Delta \mathbf{u} dA \quad (1.12)$$

und die virtuelle Arbeit der Spannungen

$$\delta \Delta W = \int_{'V} {}^{t+\Delta t}_i \mathbf{S} \cdot \delta \Delta {}^{t+\Delta t}_i \mathbf{E}^{(G)} dV = \int_{'V} {}^t_i \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t \mathbf{E} dV + \int_{'V} \Delta_t \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t \mathbf{E} dV. \quad (1.13)$$

Wegen Erfüllung des Gleichgewichts zur Zeit t ,

$$\int_{\partial'V} \Delta \mathbf{t} \cdot \delta {}^t \mathbf{u} dA - \int_{'V} {}^t_i \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t \mathbf{E} dV = \delta A(t) - \delta W(t) = 0, \quad (1.14)$$

folgt aus Gl. (1.3)

$$\int_{'V} \Delta_t \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t \mathbf{E} dV - \int_{\partial'V} \Delta \mathbf{t} \cdot \delta ({}^t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) dA = 0. \quad (1.15)$$

Mit einem linearisierten inkrementellen Stoffgesetz

$$\Delta_t \mathbf{S} = {}_t \mathbf{C}^{<4>} \cdot \Delta_t \mathbf{E} \quad (1.16)$$

erhält man das FE-Gleichungssystem

$${}_t \mathbf{K}(\Delta \mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{f}. \quad (1.17)$$

Das Gleichungssystem ist nichtlinear, da die Sekanten-Steifigkeitsmatrix vom noch unbekanntem Verschiebungszuwachs $\Delta \mathbf{u}$ abhängt. Es muß iterativ gelöst werden, z.B. mit einem NEWTON-Verfahren; Bild 1-2 zeigt schematisch die Vorgehensweise, siehe z.B. ZIENKIEWICZ & TAYLOR [2000]. Der Verschiebungszuwachs während Δt ergibt sich als Summe der mit der Tangensteifigkeitsmatrix \mathbf{K} zur Zeit t in i Iterationsschritten berechneten berechneten Zuwächse

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{j=1}^i \Delta \mathbf{u}^{(j)} = \sum_{j=1}^i {}_t \mathbf{K}^{-1} {}^{(j-1)} \mathbf{r}, \quad (1.18)$$

wobei

$${}^{(j)} \mathbf{r} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} - \mathbf{f}({}^t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^{(j)}) \quad (1.19)$$

die sogenannten "Ungleichgewichtskräfte" (residual forces, out-of-balance forces) im Iterationsschritt j sind. Die Iteration wird bei Erfüllung eines oder mehrerer Konvergenzkriterien, z.B.

$$\|{}^{(j)} \mathbf{r}\| \leq \text{RTOL} \quad \text{und / oder} \quad \|\Delta \mathbf{u}^{(j)}\| \leq \text{DTOL}, \quad (1.20)$$

abgebrochen. Aus den Verschiebungszuwächsen während Δt werden die Verzerrungszuwächse und daraus die Spannungen berechnet, die Konfiguration und alle kontinuumsmechanischen Größen aktualisiert und ein neuer Lastschritt begonnen.

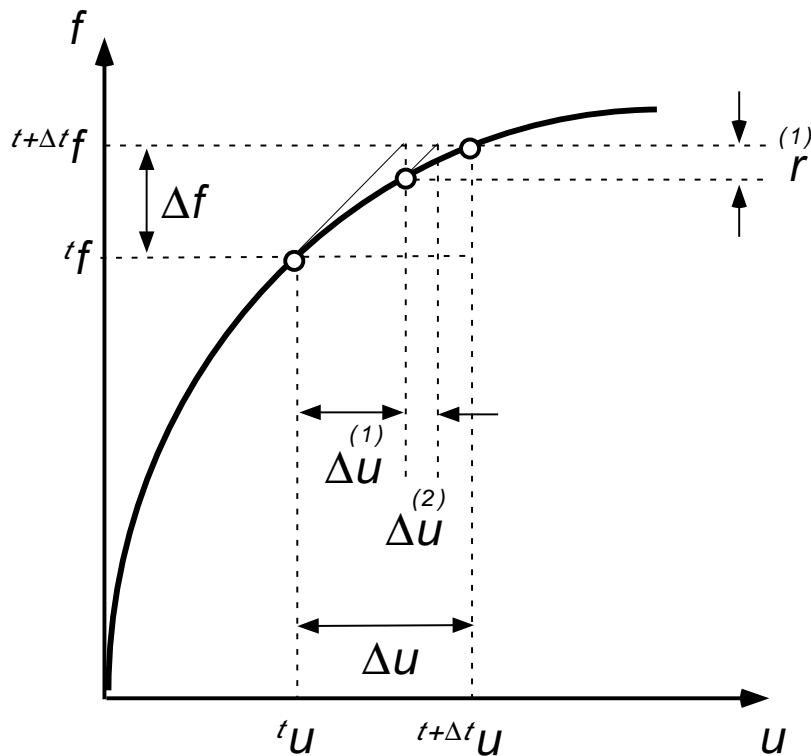


Bild 1-2: iteratives Lösungsschema im Zeitschritt Δt

1.2 Physikalische Nichtlinearitäten

Es wird elastisch-plastisches Materialverhalten nach der Theorie von MISES, PRANDTL und REUSS behandelt.

Aus dem einachsigen Zugversuch entnimmt man folgende Größen und Bedingungen (Bild 1-3):

w Fließbedingung

$$\sigma \leq R(\varepsilon^p) \quad , \quad R(0) = R_F \quad , \quad (1.21)$$

w HOOKESches Elastizitätsgesetz

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{für } \sigma \leq R_F \\ E(\varepsilon - \varepsilon^p) & \text{für } \sigma > R_F \end{cases} \quad , \quad (1.22)$$

w Be-/Entlastungsbedingung

$$\begin{cases} \dot{\sigma} > 0, & \dot{\varepsilon}^p > 0 & \text{Belastung} \\ \dot{\sigma} < 0, & \dot{\varepsilon}^p = 0 & \text{Entlastung} \end{cases} \quad . \quad (1.23)$$

R_F bezeichnet die einachsige Fließgrenze bei beginnender Plastizierung, die entweder mit einer Streck- oder einer Dehngrenze des Werkstoffs identifiziert wird.

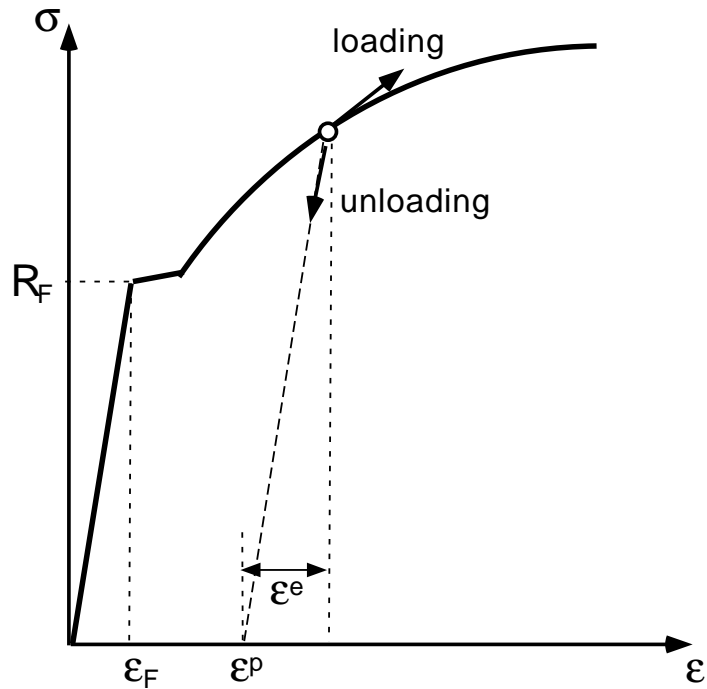


Bild 1-3: elastisch-plastisches Werkstoffverhalten im einachsigen Zugversuch

Die Verallgemeinerung auf allgemeine mehrachsige Spannungs- und Dehnungszustände führt zu den Gleichungen und Ungleichungen

w Fließbedingung

$$\bar{\sigma} \leq R(\epsilon^p) \quad (1.24a)$$

mit der Vergleichsspannung nach Mises

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (1.24b)$$

und den Deviatorspannungen

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad (1.24c)$$

w HOOKESches Elastizitätsgesetz - inkrementell formuliert entsprechend Gl. (1.16)

$$\dot{\sigma}_{ij} = \begin{cases} 2G \left[\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\dot{\epsilon}_{kk}) \delta_{ij} \right] & \text{für } \bar{\sigma} \leq R_F \\ 2G \left[(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) + \frac{\nu}{1-2\nu} (\dot{\epsilon}_{kk}) \delta_{ij} \right] & \text{für } \bar{\sigma} > R_F \end{cases} \quad (1.25)$$

w Be-/Entlastungsbedingung

$$\begin{cases} \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} > 0, & \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 & \text{Belastung} \\ \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} < 0, & \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 & \text{Entlastung} \end{cases} \quad (1.26)$$

sowie der zusätzlichen

w Fließregel

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{E^p \bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (1.27a)$$

mit dem plastischen Sekantenmodul

$$E^p = \frac{E_t E}{E - E_t} \quad (1.27b)$$

und dem Tangentenmodul

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (1.27c)$$

aus dem einachsigen Zugversuch, Bild 1-3. Man beachte dass für die UL Formulierung eine "wahre" Spannungsdehnungskurve, also wahre (CAUCHYSche) Spannungen über logarithmischen (HENCKYSchen) Dehnungen erforderlich ist.

Die zur MISES-Vergleichsspannung konjugierte plastische Vergleichsdehnrate $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ ergibt sich aus der Äquivalenzbedingung für die plastische Dissipationsleistung

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}^p \quad (1.28)$$

zu
$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} . \quad (1.29)$$

Durch Integration erhält man die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}^p d\tau , \quad (1.30)$$

die als innere Variable die Belastungsgeschichte und insbesondere die Verfestigung $R(\varepsilon^p)$ beschreibt. Die plastischen Dehnungsinkremente sind deviatorisch, d.h.

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0 . \quad (1.31)$$

2. FE-Netze in der Umgebung von Spannungskonzentratoren

Hohe Spannungsgradienten erfordern feine Diskretisierungen und führen damit zu einer großen Zahl von Freiheitsgraden. Elastisch-plastische Rechnungen an Bauteilen mit Spannungskonzentratoren sind deshalb hinsichtlich Speicherbedarf und Rechenzeiten sehr aufwendig. Alle Möglichkeiten der Reduzierung von Freiheitsgraden sollten folglich unbedingt ausgeschöpft werden:

- Einführen von Symmetriebedingungen,
- soweit möglich und vertretbar Beschränkung auf 2-dimensionale Modelle der Gesamtstruktur,
- 2-dimensionale Modellierung von Strukturteilen im Fernfeld,
- Konstruktion spezieller Singularitätselemente mit risspezifischen Ansatzfunktionen.

Das bedeutendste Hindernis für die Etablierung bruchmechanischer FE-Analysen in der Praxis ist der für die Vernetzung erforderliche Zeitaufwand. Durch Einführung einer "Modul-Technik" kann man den Vernetzungsprozess wesentlich vereinfachen und beschleunigen. Dabei wird im Bauteil um die Rissfront herum eine "Box" freigelassen. Dieser frei gelassene Ausschnitt wird durch entsprechende Skalierung einer fertigen aufbereiteten 3D "Riss-Box" ersetzt. Die Globalvernetzung erfolgt unabhängig von dem Ausschnitt mit relativ großen Elementen. Diese Methode wurde von CORNEC et al. [1999, 2001] mit dem Programm IDEAS verifiziert.

CD.BOX ALS PLUG-IN-MODULE

- 1 Durchriß (aus acht CD.Boxen zusammengesetzt)
- 2 Oberflächenriß (aus vier CD.Boxen zusammengesetzt)
- 3 Kantenoberflächenriß (aus zwei CD.Boxen zusammengesetzt)
- 4 Kugeldefekt an der Oberfläche (aus vier CD.Boxen zusammengesetzt)

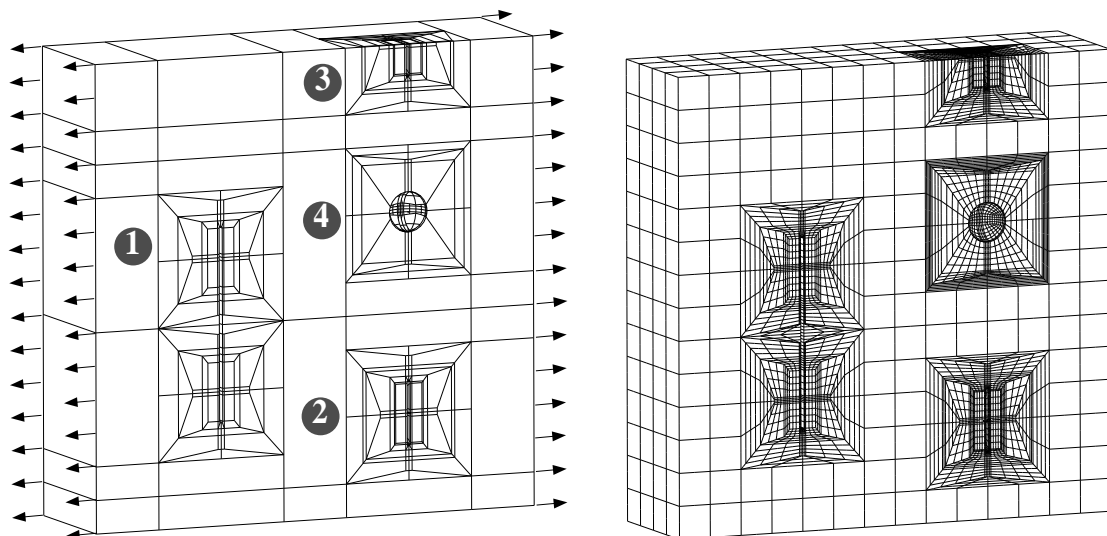


Bild 2-1: Modulare Vernetzung von Strukturen mit Rissen und anderen Defekten

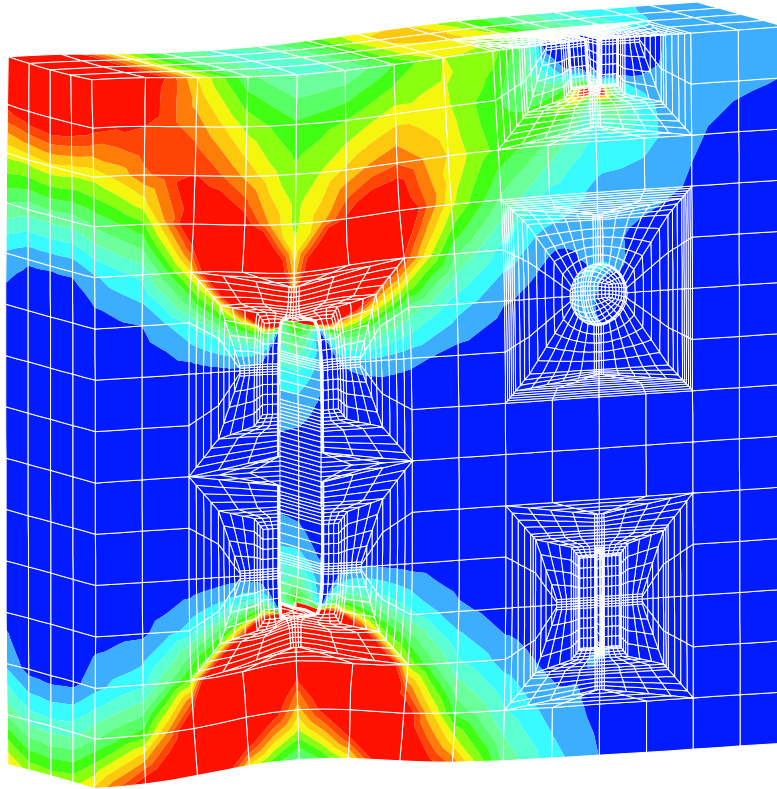


Bild 2-2: Verformte Zugscheibe nach Bild 2-1 mit Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung

2.1 Singuläre isoparametrische Elemente

Die Risspitze ist ein singulärer Punkt. Eine beliebige Verfeinerung des FE-Netzes ist weder praktikabel noch unter Konvergenzgesichtspunkten sinnvoll. Stattdessen werden für stationäre (nicht wachsende) Risse spezielle singuläre Rissspitzenelemente verwendet, die die Verzerrungssingularitäten der linear elastischen Bruchmechanik LEBM (IRWIN [1957])

$$\varepsilon_{ij} \cong r^{-1/2} \quad (2.1a)$$

oder der elastisch-plastische Bruchmechanik EPBM (HRR-Feld, HUTCHINSON [1968], RICE & ROSENGREN [1968]) für den Grenzfall ideal-plastischen Werkstoffs ($n \rightarrow \infty$)

$$\varepsilon_{ij} \cong r^{-1} \quad (2.1b)$$

abbilden.

Singuläre Rissspitzenelemente wurden in den Anfängen der numerischen Behandlung von bruchmechanischen Problemen entwickelt und angewendet, um die Genauigkeit berechneter Spannungsverläufe an der Risspitze und ermittelter K -Faktoren bei begrenzter Rechnerkapazität zu steigern. BARSOUM [1977] fand, dass dreieckige bzw. prismatische quadratische isoparametrische Elemente, die durch Kollabieren einer Seite bzw. Fläche und durch Verschieben der Mittenknoten auf die 1/4-Position gebildet werden (double distorted elements), sowohl die

$1/\sqrt{r}$ - Singularität der LEBM als auch die $1/r$ -Singularität der EPBM für ideal-plastisches Material aufweisen, siehe Bild 2-3.

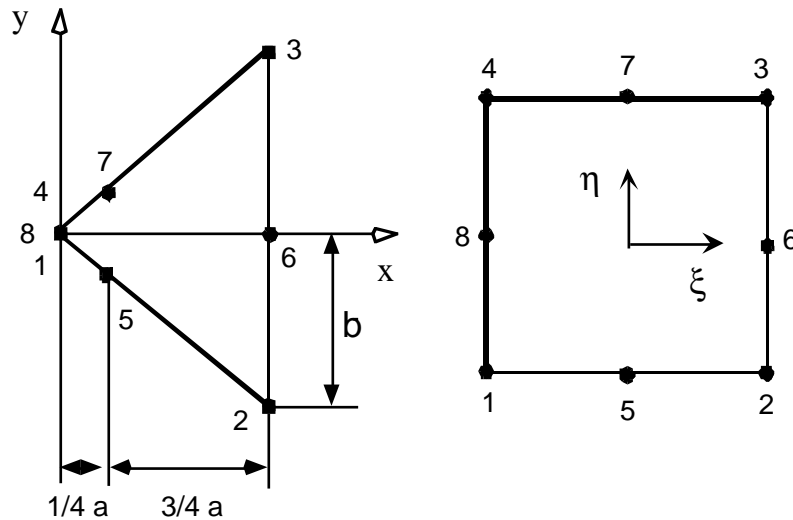


Bild 2-3: kollabiertes Viertelpunkt-Element

Das Verzerrungsfeld hat die Form

$$\varepsilon_{ij}(r, \vartheta) = \frac{\alpha_{ij}^{(0)}(\vartheta)}{\sqrt{r}} + \frac{\alpha_{ij}^{(1)}(\vartheta)}{r} + \alpha_{ij}^{(2)}(\vartheta) . \quad (2.2)$$

Erfahren alle Rissspitzenknoten die gleiche Verschiebung, also $u_x^{[1]} = u_x^{[4]} = u_x^{[8]}$ und $u_y^{[1]} = u_y^{[4]} = u_y^{[8]}$ ist $\alpha_{ij}^{(1)} = 0$, und die $1/\sqrt{r}$ - Singularität der LEBM des Verzerrungsfeldes und damit auch des Spannungsfeldes ist realisiert. Werden die Mittenknoten nicht auf die Viertelposition verschoben und können sich die Rissspitzenknoten unabhängig voneinander verschieben, verschwindet der erste Term, $\alpha_{ij}^{(0)} = 0$, und man erhält die $1/r$ -Singularität des Verzerrungsfeldes in ideal-plastischem Material. Trotz der Singularität bleibt die Verzerrungsenergie-dichte $\iint_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} r dr d\vartheta$ für $r \rightarrow 0$ beschränkt.

Numerische Studien z.B. von McMEEKING & RICE [1975] und BROCKS et al. [1985] haben gezeigt, dass dreieckige kollabierte 8-Knoten-Elemente mit $1/r$ -Singularität gut für elastisch-plastische Rechnungen geeignet sind. Die Bedeutung singulärer Elemente für bruchmechanische FE-Analysen hat in jüngerer Zeit etwas abgenommen, weil

- sie für Rissfortschritts- und schädigungsmechanische Rechnungen ungeeignet sind, in denen eine regelmäßige Elementanordnung im Ligament erforderlich ist (siehe Bild 2.10),
- die Berechnung des J -Integrals nach der Methode der virtuellen Rissverschiebung auch für relativ grobe Netze zu guten Ergebnissen führt (vgl. BROCKS & SCHEIDER [2001]).

Für die Berechnung der Rissspitzenöffnung bei großen plastischen Verformungen ("blunting", siehe Bild 2.6) und von Spannungsverläufen an der Rissspitze sind sie dagegen nach wie vor unentbehrlich.

2.2 Beispiel 1: C(T)-Probe

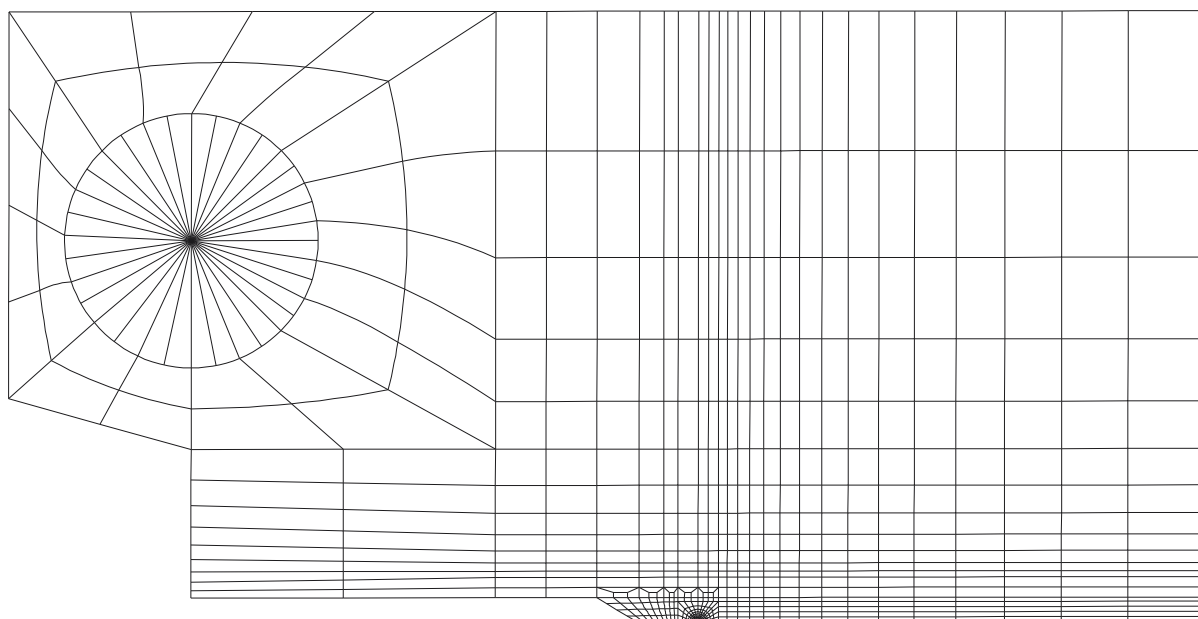


Bild 2-4: FE-Netz (2D) einer C(T)-Probe ($W = 50 \text{ mm}$, $a/W = 0,5$); Ausnutzung der einfachen Symmetrie im Ligament

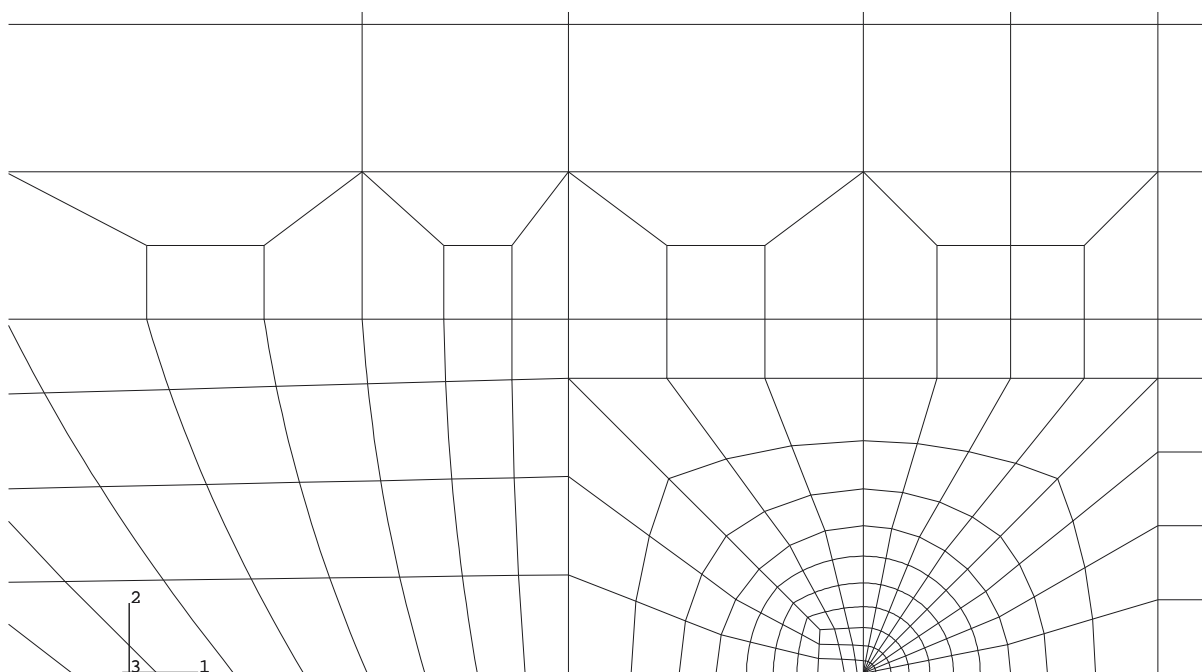


Bild 2-5: Netzausschnitt der Risspitzenumgebung mit kollabierten Elementen

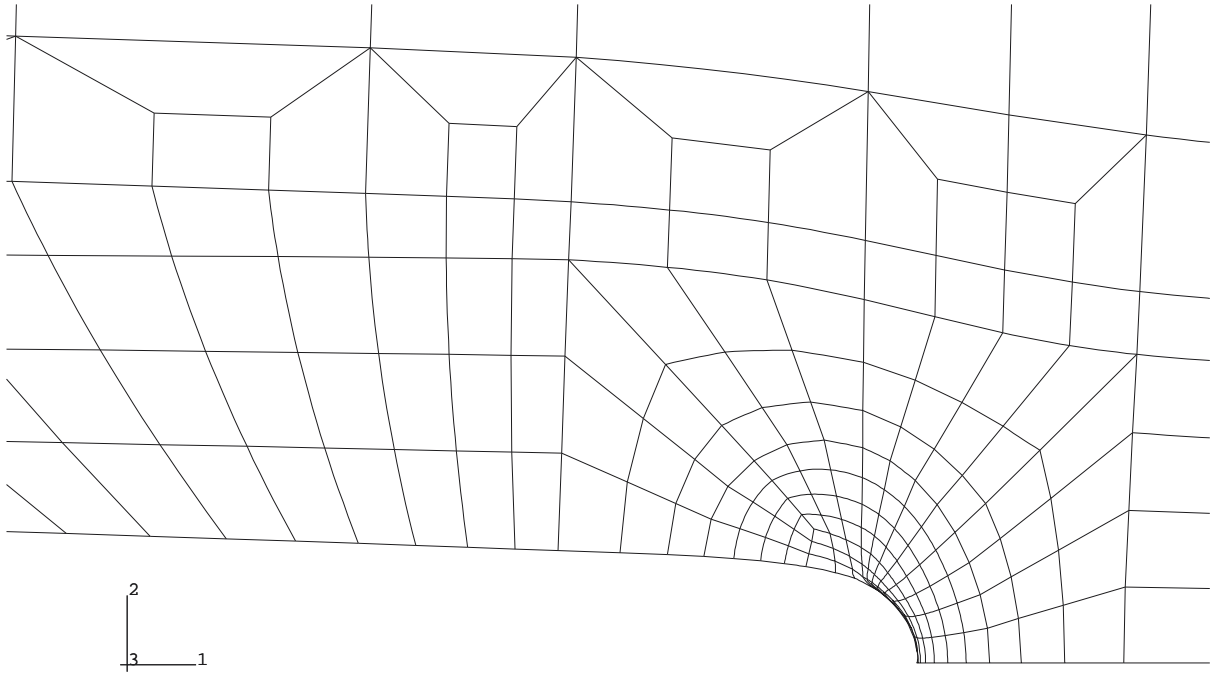


Bild 2-6: verformtes Netz in der Risspitzenumgebung, Risspitzen-Ausrundung (blunting)

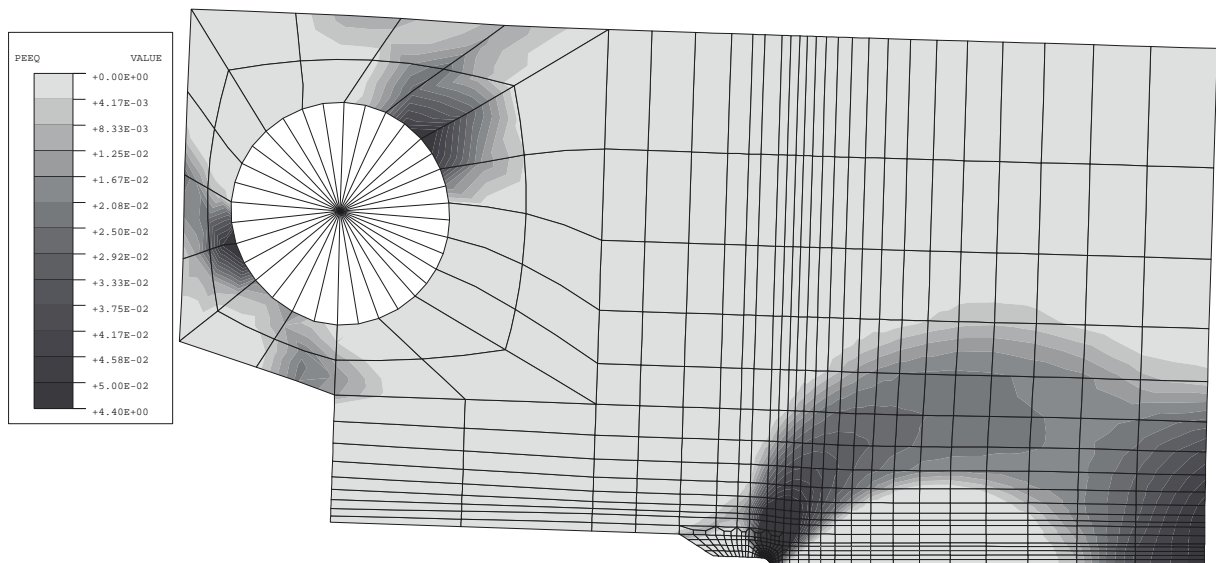


Bild 2-7: plastische Vergleichsdehnungen im verformten Netz

2.3. Beispiel 2: Kreuzprobe

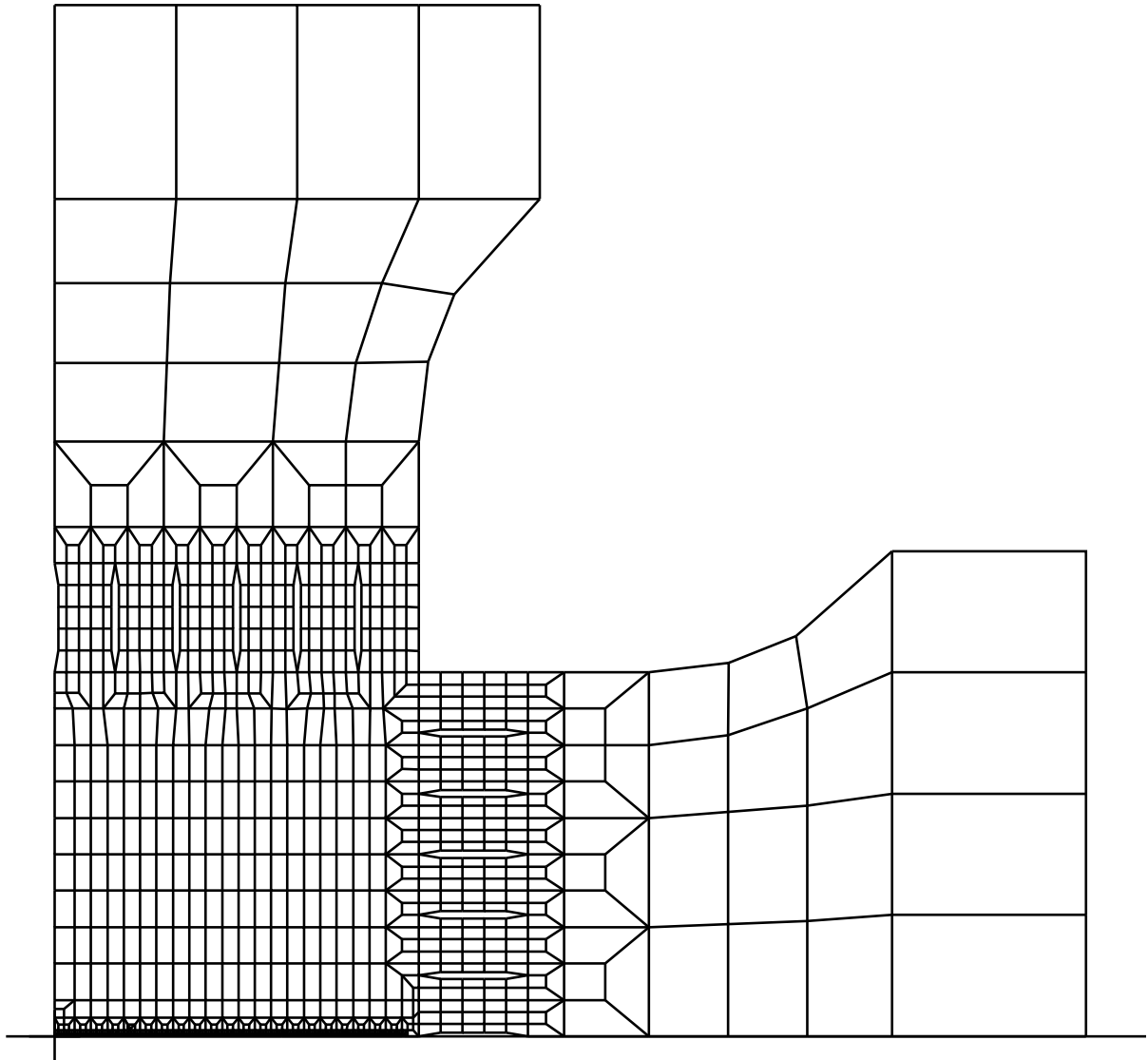


Bild 2-8: FE-Netz (2D) einer biaxial gezogenen kreuzförmigen Probe; Ausnutzung der doppelten Symmetrie

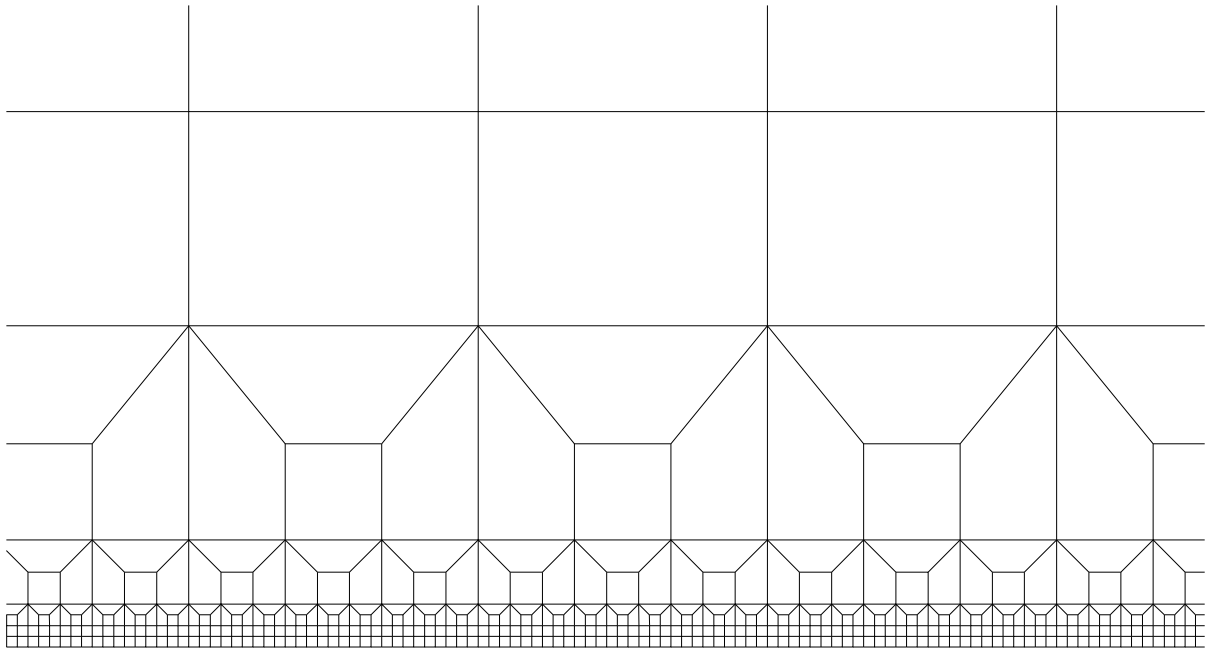


Bild 2-9: Netzausschnitt der Rissspitzenumgebung mit regelmäßiger Elementanordnung im Ligament zur Simulation von Rissfortschritt

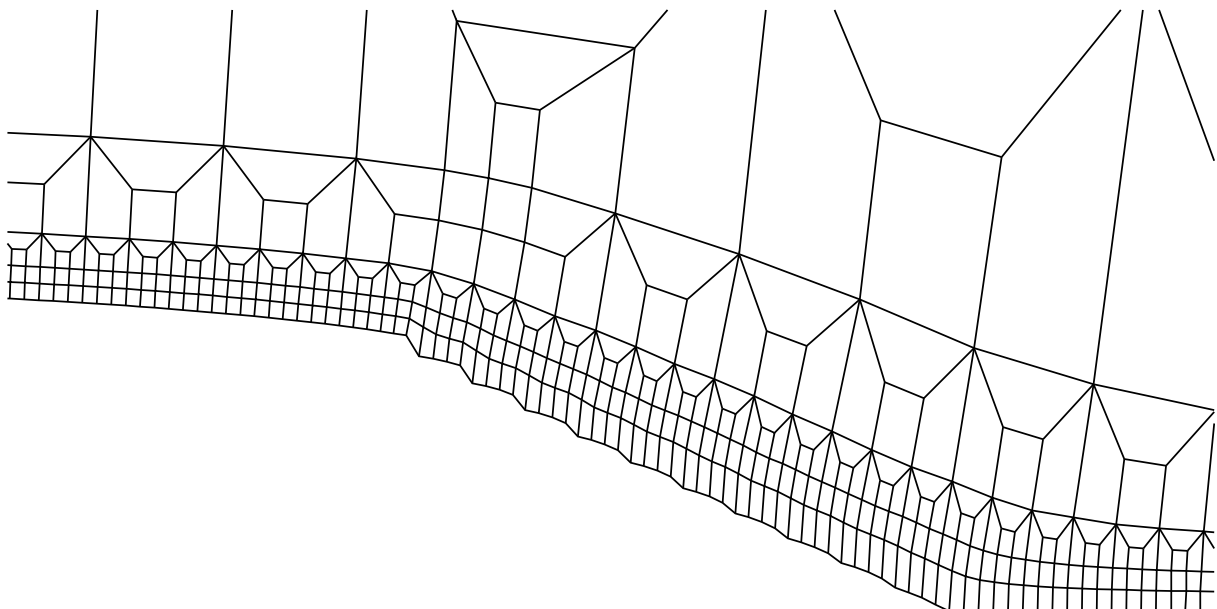


Bild 2-10: Verformtes Netz mit Rissfortschritt (CTOA gesteuert)

2.4. Beispiel 3: Rohrknoten mit Schweissnaht

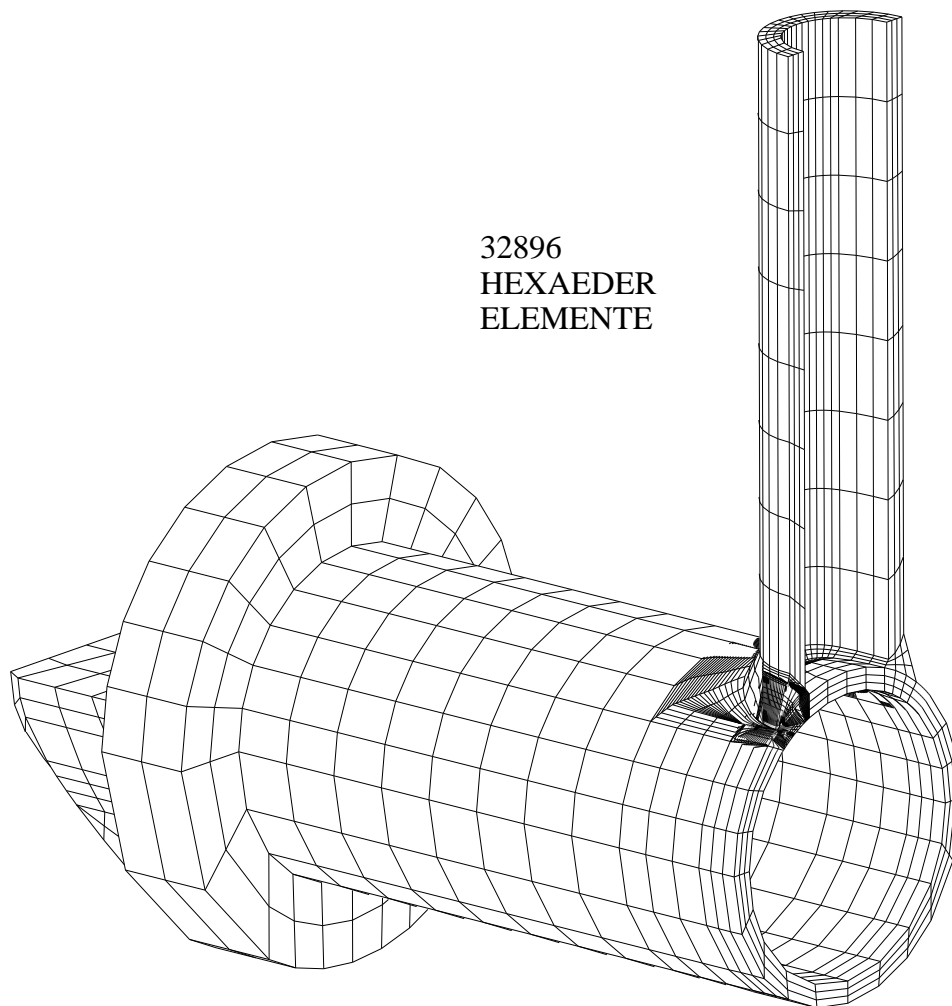


Bild 2-11: 3D FE-Netz des Rohrknotts; Ausnutzung der einfachen Symmetrie
(CORNEC et al. [1999])

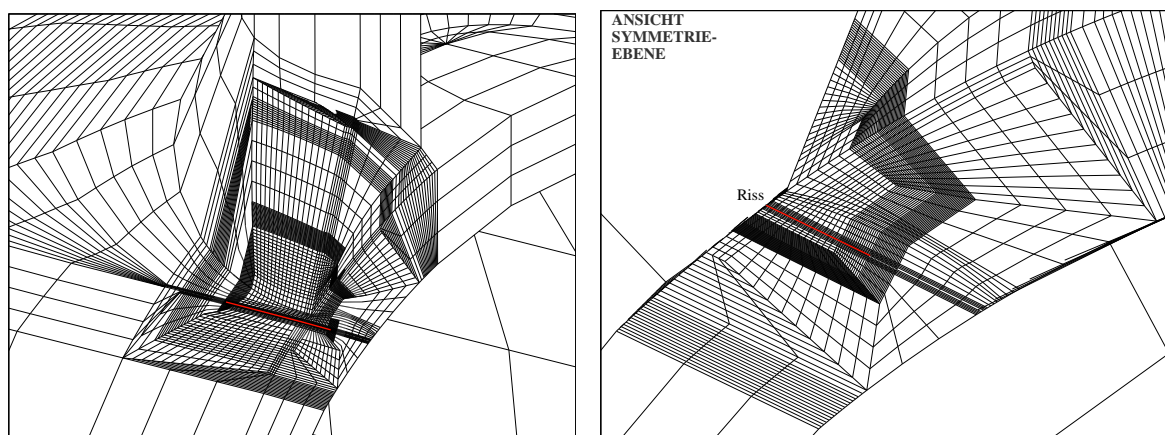


Bild 2-12: Detail des FE-Netzes am halbellenförmigen Oberflächenriss in der Schweissnaht

3. Ermittlung von Bruchkennwerten

3.1. Spannungsintensitätsfaktoren

Die Spannungsintensitätsfaktoren K_I , K_{II} , K_{III} der LEBM bestimmen die Singularitäten der Spannungsfelder an der Risspitze ebenso wie die Nahfeldlösungen der Verschiebungsfelder für die drei Rissöffnungsarten. Sind Lösungen für Spannungs- und Verschiebungsfelder bekannt, können die entsprechenden Beziehungen umgekehrt zur Ermittlung der Intensitätsfaktoren benutzt werden:

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{pmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \begin{pmatrix} \sigma_{yy}(r, 0) \\ \sigma_{xy}(r, 0) \\ \sigma_{yz}(r, 0) \end{pmatrix}, \quad (3.1a)$$

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa+1} u_y(r, \pi) \\ \frac{1}{\kappa+1} u_x(r, \pi) \\ \frac{1}{4} u_z(r, \pi) \end{pmatrix} \quad (3.2a)$$

mit

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{für EVZ} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{für ESZ} \end{cases}. \quad (3.2b)$$

Wertet man also die Gln (3.1a-c) mit den numerisch ermittelten Spannungs- oder Verschiebungskomponenten für verschiedene Abstände r von der Rissfront aus, so können durch Extrapolation $r \rightarrow 0$ die Spannungsintensitätsfaktoren bestimmt werden. Die Berechnung aus den Verschiebungen setzt eine Annahme über EVZ- oder ESZ-Bedingungen² voraus, was im Falle eines 2D Modells den Annahmen der FE-Rechnung entspricht. Bei einer 3D Rechnung hingegen liegt der "wahre" Zustand irgendwo zwischen den beiden Grenzzuständen.

In der LEBM sind die Spannungsintensitätsfaktoren mit der Energiefreisetzungsrate G verknüpft:

$$G = J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (3.3a)$$

$$\text{mit } E' = \begin{cases} E & \text{für ESZ} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{für EVZ} \end{cases} \quad \text{und} \quad 2G = \frac{E}{1+\nu}. \quad (3.3b)$$

Für reinen Modus I gilt

$$K_I = \sqrt{J E'}. \quad (3.4)$$

Nach einer Idee von PARKS [1974] kann die Energiefreisetzungsrate (und damit K) nach der Methode der virtuellen Rissverlängerung durch Verschieben eines Elementbereiches um die

² EVZ = ebener Verzerrungszustand (plane strain), ESZ = ebener Spannungszustand (plane stress)

Risspitze herum berechnet werden. Dieses Verfahren wurde von PARKS [1977] und DELORENZI [1982] auf nichtlineares Materialverhalten erweitert und ist zum Standardverfahren für die J -Berechnung in der LEBM geworden (siehe Abschnitt 3.2 und BROCKS & SCHEIDER [2001]).

Bei Überlagerung von Modus I und II (Mixed-Mode) gilt zusätzlich zu Gl. (3.3a)

$$J_2 = -2 \frac{K_I K_{II}}{E'} , \quad (3.5)$$

für die zweite Komponente des " J -Vektors", siehe z.B. KIENZLER [1993]. Man beachte, daß J_2 nicht wegunabhängig ist sondern von der Länge der Rißflanken abhängt, die vom Linienintegral umschlossen werden (GOLEBIEWSKA-HERRMANN & HERRMANN [1981]).

Ein effektive Verfahren zur Bestimmung von Energiefreisetzungsraten - und damit von Spannungsintensitätsfaktoren - basieren auf IRWIN's "Risschließungsintegral" (virtual crack closure integral, VCCI) - dem Pendant zur "virtuellen Rissverlängerung" (Bild 3-2) -

$$G_1(a) = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \int_{x=0}^{\delta a} \frac{1}{2} \sigma_{yy}(r=x, \vartheta=0, a) u_y(r=\delta a-x, \vartheta=\pi, a+\delta a) dx . \quad (3.6)$$

RYBICKI & KANNINEN [1977] haben als Erste das modifizierte Risschließungsintegral für 2D-Probleme eingeführt, mit dessen Hilfe das Integral aus einer einzigen FE-Rechnung berechnet werden konnte. Erweiterungen der Methode auf 3D-Probleme und Elemente höherer Ordnungen sowie singuläre Elemente stammen von BUCHHOLZ [1984] und RAJU [1987]. Eine Übersicht über die Anwendung der Methode geben BUCHHOLZ et al. [1999].

3.2. Das J -Integral

Das J -Integral

$$J = \oint_{\Gamma} \left[W dx_2 - \sigma_{jk} n_k u_{j,1} ds \right] \quad (3.7)$$

wurde von CHEREPANOV [1967] und RICE [1968] in die LEBM eingeführt. Es ist unter den Bedingungen

- (1) zeit-unabhängige Prozesse, keine Volumenkräfte: $\sigma_{ij,j} = 0$,
- (2) kleine Deformationen: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$,
- (3) homogenes hyperelastisches Material: $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$
- (4) ebene Spannungs- und Verschiebungsfelder, d.h. keine Abhängigkeit von x_3 ,
- (5) gerade und spannungsfreie Rissflanken parallel zu x_1 (siehe Bild 3-1)

wegunabhängig, d.h. $\oint_{\Gamma_1}^{\leftarrow} [W dx_2 - \sigma_{jk} n_k u_{j,i} ds] = - \oint_{\Gamma_2}^{\rightarrow} [\dots] = \oint_{\Gamma}^{\leftarrow} [\dots]$.

RICE [1968] und BUDIANSKY & RICE [1973] haben auch gezeigt, dass das Linienintegral identisch der Energiefreisetzungsrate

$$J = G = -(\partial U / \partial A). \quad (3.8)$$

für ebene Rissausbreitung ΔA ist. In der LEBM ist das J -Integral deshalb nach Gl. (3.3a) mit den Spannungsintensitätsfaktoren verknüpft.

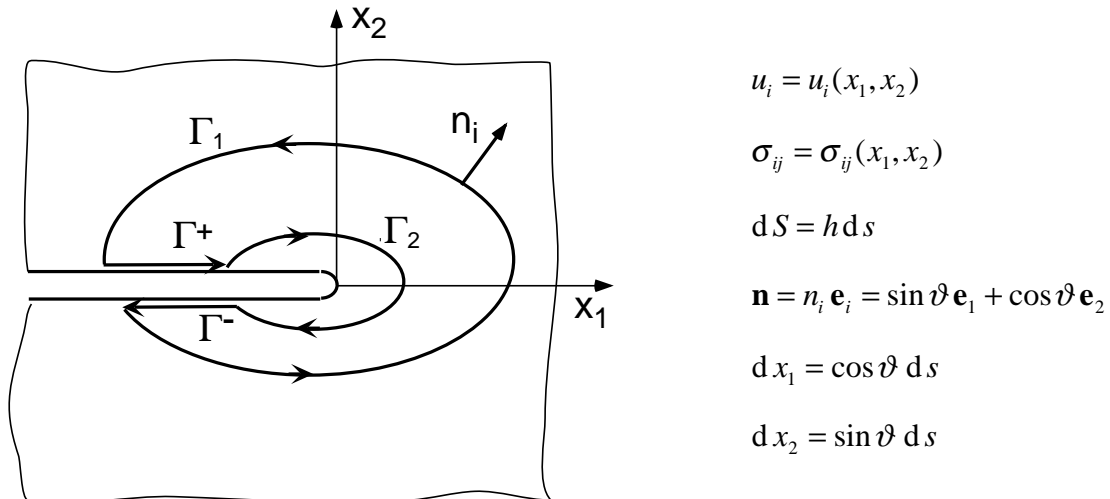


Bild 3-1: Definition verschiedener Konturen zur J -Integral-Berechnung

Die Berechnung eines Linienintegrals nach Gl. (3.7) ist in der FEM unvorteilhaft, weil Koordinaten und Verschiebungen auf Knotenpunkte, Spannungen und Verzerrungen auf GAUSS-Punkte bezogen sind. Spannungsfelder sind im allgemeinen nicht stetig über Elementgrenzen hinweg, und die Extrapolation von Spannungen auf Knotenpunkte macht zusätzliche Annahmen erforderlich. Deshalb wird üblicherweise eine Gebietsintegralmethode zur Berechnung von J benutzt. Durch Anwendung des GAUSSschen Divergenzsatzes kann das Linienintegral in ein Gebietsintegral über ein endliches Gebiet um die Risspitze herum umgeformt werden. Diese Methode ist numerisch robust und liefert auch für grobe Netze genaue Werte. Sie wurde zuerst von PARKS [1977] vorgeschlagen und später von DELORENZI [1982] weiter ausgearbeitet.

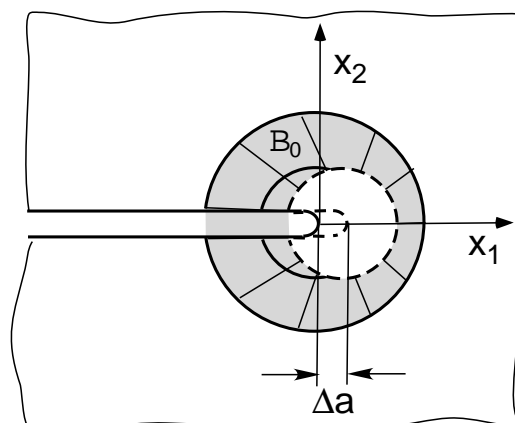


Bild 3-2: Virtuelle Rissverlängerung

Das J -Integral wird dabei als Energiefreisetzungsrate interpretiert, die mit einer fiktiven Rissverlängerung Δa , verbunden ist, siehe Bild 3-2,

$$J = \frac{1}{\Delta A_c} \iint_{B_0} [\sigma_{ij} u_{j,k} - W \delta_{ik}] \Delta x_{k,i} dS, \quad (3.9)$$

wobei Δx_k die Verschiebung der Rissfrontkoordinaten, ΔA_c der entsprechende Zuwachs der Rissfläche und das Integrationsvolumen die graue Fläche in Bild 3-2 ist. Wegen dieser physikalischen Interpretation ist die Gebietsintegralmethode auch unter dem Namen "Methode der virtuellen Rissverlängerung" bekannt.

Lokale J -Werte entlang einer beliebig gekrümmten ebenen Rissfrontkurve können dadurch definiert werden, dass man eine Scheibe konstanter infinitesimal kleiner Dicke senkrecht zur Rissfront legt und die Integrale über deren Oberfläche ausführt, siehe Bild 3-3. Eine 3D Verallgemeinerung der Methode der virtuellen Rissverlängerung läuft deshalb auf die Verschiebung einzelner Rissfrontknoten und die Berechnung der damit verbundenen lokalen Energiefreisetzungsrate hinaus (BAKKER [1984]).

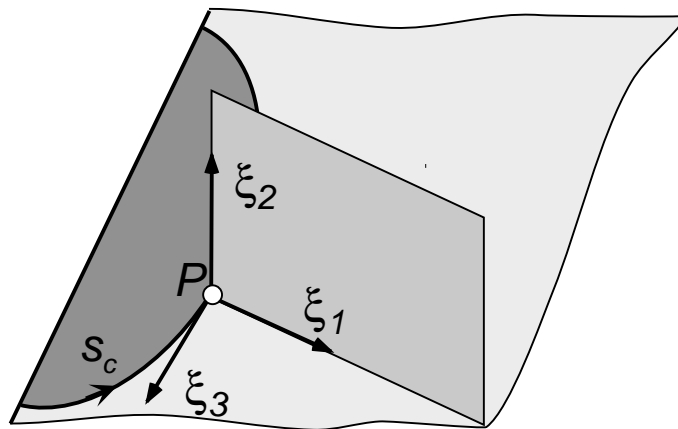


Bild 3-3: Definition lokaler J -Werte für dreidimensionale Probleme

Im Falle elastisch-plastischen Materialverhaltens nach der inkrementellen Plastizitätstheorie geht selbstverständlich die Eigenschaft der "Wegunabhängigkeit" des J -Integrals verloren (McMEEKING [1977]); seine Eigenschaft, das Spannungs- und Deformationsfeld nahe der Risspitze zu dominieren, bleibt aber mit gewissen Einschränkungen erhalten (McMEEKING & PARKS [1979]). Für kleine plastische Zonen kann ein wegunabhängiges Integral außerhalb der plastischen Zone berechnet werden. Das bedeutet, dass Γ - oder das entsprechende Gebiet - groß genug sein muß, um außerhalb der plastischen Zone zu liegen. Bei globaler Plastizierung ist dies nicht mehr möglich, so dass eine mehr oder weniger ausgeprägte Wegabhängigkeit immer

aufzutreten wird. Die Berechnung eines "wegunabhängigen" Integrals wird damit zur Frage numerischer Genauigkeit. Wegen seiner Bedeutung als globale Energiefreisetzungsrate, die auch zur Bestimmung von J im Experiment herangezogen wird, muß J als "Sättigungswert" verstanden werden, der im "Fernfeld" weit weg von der Rissspitze erreicht wird. Jede Art von "Nahfeld"-Integralen wie bei ATLURI et al. [1984] oder BRUST et al. [1985] ist physikalisch bedeutungslos. Da J eine monoton wachsende Funktion des Abstandes r von der Rissspitze ist (YUAN & BROCKS [1989]) - jedes andere Verhalten würde Energieproduktion statt Dissipation bedeuten -, ist der höchste mit zunehmender Gebietsgröße berechnete J -Wert die beste Annäherung an den wirklichen Fernfeldwert,

$$J_{\text{tip}} \leq J(r) \leq J_{\text{far field}} \quad (3.10)$$

An einer sich plastisch ausrundenden Rissspitze (Bild 2-6) treten starke Spannungsumlagerungen auf, so dass die Wegabhängigkeit dort stark zunimmt. J wird sogar nur dann überhaupt einen endlichen Wert beim Grenzübergang zu einer infinitesimal kleinen Kontur behalten, wenn die Verzerrungsenergiedichte W eine Singularität der Ordnung r^{-1} hat. Dies ist in der LEBM erfüllt, wo Spannungen und Verzerrungen eine $1/\sqrt{r}$ -Singularität besitzen, sowie für HRR-Felder. Da die Spannungssingularität an der plastisch ausgerundeten Rissspitze bei Annahme großer Verzerrungen und inkrementeller Plastizität verschwindet, hat J nicht einmal mehr einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert

$$J_{\text{tip}} = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} [W dx_2 - \sigma_{jk} n_k u_{j,1} ds] = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} W r \cos \vartheta d \vartheta = 0 \quad (3.11)$$

Derselbe Effekt tritt bei wachsenden Rissen auf (YUAN & BROCKS [1989]), wo Spannungen und Dehnungen zwar immer noch singular sind, der Grad der Singularität aber nicht hoch genug ist, um eine von Null verschiedene lokale Energiefreisetzungsrate zu gewährleisten, was RICE [1965, 1979] als das "Paradoxon der elastisch-plastischen Bruchmechanik" bezeichnet hat, das aussagt, dass kein Energieüberschuß für das weitere Risswachstum existiert. Zur numerischen Berechnung eines physikalisch begründeten "Fernfeldwertes" von J siehe BROCKS & SCHEIDER [2001].

Die Wegunabhängigkeit geht ebenfalls verloren, wenn im virtuell verschobenen Bereich äußere Belastungen wirksam sind wie z.B.

- Druckbelastung der Rissfläche,
- thermische Dehnungen durch Temperaturgradienten,
- Massenkräfte aus Gewicht oder Beschleunigungen.

Für diese Fälle wurden spezielle "Korrekturterme" hergeleitet, die die Wegunabhängigkeit wiederherstellen (siehe z.B. MUSCATI & LEE [1984], SIEGELE [1989]).

3.3. Die Rissspitzenöffnung CTOD und der Rissöffnungswinkel CTOA

Die numerische Simulation der Rissspitzenöffnung CTOD beim stationären Riss erfordert eine Rechnung mit großen Deformationen; die Rissumgebung sollte mit kollabierten Elementen vernetzt werden, siehe Bild 2.6. Eine einheitliche Definition der Rissspitzenöffnung existiert - wie im Experiment - nicht. Entsprechend werden auch bei FE-Rechnungen verschiedene Auswertungsverfahren verwendet:

- Lineare Extrapolation der Rissöffnung im Fernfeld auf den Ursprung. Diese Definition erlaubt die Verwendung eines relativ groben Netzes an der Rissspitze, da die Werte ausschließlich auf Fernfeldverschiebungen basieren und damit weitgehend unabhängig von der Diskretisierung sind. Sie bietet darüber hinaus gute Vergleichsmöglichkeiten mit experimentellen Ergebnissen, da letztere nach ähnlichen Verfahren bestimmt werden.
- Verschiebung des Rissspitzenknotens desjenigen Elementes, das an der freien Rissoberfläche liegt. Diese Definition ist zwar sehr einfach zu handhaben, liefert aber Ergebnisse, die stark von der gewählten Elementierung der Rissspitze abhängen.
- Rissöffnung am Schnittpunkt des Öffnungsprofils mit einer von der Rissspitze ausgehenden 45°-Sekante. Diese Definition entspricht derjenigen der HRR-Theorie und liefert deshalb einen einfachen analytischen Zusammenhang mit dem J -Integral. Sie ist aber experimentell nicht zu realisieren.

Der Rissöffnungswinkel CTOA wird insbesondere bei Blechen als Kriterium für Risswachstum verwendet. Hierfür ist ein regelmäßiges Netz aus gleich großen Rechteckelementen im Ligament erforderlich, siehe Bilder 2.9 und 2.10. Auch für CTOA existiert keine einheitliche Definition. Die Berechnung aus dem rissspitzennächsten Element oder die Mittelung über mehrere Elemente führt zu unterschiedlichen Ergebnissen.

4. Danksagung

Der Autor dankt den Herren Dr. Alfred Cornec, Dr. Ingo Scheider, Manfred Schödel und Wernfried Schönfeld für die FE-Bilder.

5. Literatur

ATLURI, S.N., NISHIOKA, T. and NAKAGAKI, M.[1984]: "Incremental path-independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechanics", Engineering Fracture Mechanics 20, 209-244.

BAKKER, A. [1984]: "The three-dimensional J -Integral", Delft University of Technology (The Netherlands), Report WTHD 167.

BARSOUM, R.S. [1977]: "Triangular quarterpoint elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements", Int. J. Num. Meth. Engng. 11, 85-98.

BATHE, K.J. [1996]: "Finite Element Procedures", Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.

BROCKS, W., MÜLLER, W. and OLSCHESKI, J. [1985]: "Experiences in applying ADINA to the analysis of crack tip fields in elastic-plastic fracture mechanics", Computers and Structures 21, 137-158.

BROCKS, W. and SCHEIDER, I. [2001]: "Numerical aspects of the path-dependence of the J -integral in incremental plasticity - How to calculate reliable J -values in FE analyses", GKSS Forschungszentrum, Bericht GKSS/WMS/01/08.

BRUST, F. W., NISHIOKA, T. and ATLURI, S. N. [1985]: "Further studies on elastic-plastic stable fracture utilizing the T^* -Integral". Engineering Fracture Mechanics 22, 1079-1103.

BUCHHOLZ, F.-G. [1984]: "Improved formulae for the finite element calculation of the strain energy release rate by the modified crack closure integral method", Accuracy, Reliability and Training in FEM Technology (Ed. J. ROBINSON), Dorset, 650-659.

BUCHHOLZ, F.-G., CHERGUI, A., RICHARD, H. A. [1999]: "Computational fracture analyses by means of virtual crack closure integral methods", In Mecánica Computacional (Eds. C. GARCIA GARINO et al.), CD-ROM-Proc. of the 6th Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM99), Mendoza (Argentina), Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 29.1-29.19

BUDIANSKY, E. and RICE, J.R. [1973]: "Conservation laws and energy release rates", J. Appl. Mech. 40, 201-203.

CHEREPANOV, C.P. [1967]: "Crack propagation in continuous media", Appl. Math. Mech. 31, 476-488.

CORNEC, A., SCHÖNFELD, W. und ZERBST, U. [1999]: "Finite Element Analyse für ingenieurmäßige Fehlerbewertungsverfahren: Verifizierung am Rohrknoten für den ESIS TC 1.3 Round Robin", DVM-Bericht 231, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 263-375.

- CORNEC, A., SCHÖNFELD W., BROCKS, W. und SCHWALBE, K.-H. [2001]: "Fehlerbewertung von geschweißten bimetallicen Rohrkomponenten - Vorhersage mit ETM und FEA", DVM-Bericht 233, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 298-321.
- DELORENZI, H.G. [1982]: "On the energy release rate and the J-integral for 3D crack configurations", Int. J. Fracture 19, 183-193.
- GADALA, M.S., DOKAINISH, M.A. and ORAVAS. G.A. [1980]: "Geometric and material non-linearity problems - Lagrangian and updated Lagrangian formulations", Proc. 2nd Int. Conf. Numerical Methods in Fracture Mechanics, Swansea, Pineridge Press, 277-293.
- GOLEBIEWSKA-HERRMANN, A. and HERRMANN, G. [1981]: "On energy release rates for a plane crack", J. Appl. Mech. 48, 525-528.
- HUTCHINSON, J.W. [1968]: "Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material" J. Mech. Phys. Solids 16, 13-31.
- IRWIN, G.R. [1957]: "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", J. Appl. Mech. 24, 361-364.
- KIENZLER, R. [1993]: "Konzepte der Bruchmechanik: Integrale Bruchkriterien", Braunschweig: Vieweg (Grundlagen und Fortschritte der Ingenieurwissenschaften).
- MCMEEKING, R.M. [1977]: "Path dependence of the J -integral and the role of J as a parameter characterizing the near tip field", American Society for Testing and Materials, ASTM STP 631, 28-41.
- MCMEEKING, R.M. and PARKS, D.M. [1979]: "On criteria for J-dominance of crack-tip fields in large scale yielding", ASTM STP 668, American Society for Testing and Materials, 175-194.
- MCMEEKING, R.M. and RICE, J.R. [1975]: "Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic formulations", Int. J. Solids Struct. 11, 601-616.
- MUSCATI, A. and LEE, D.J. [1984]: "Elastic-plastic finite element analysis of thermally loaded cracked structures", Int. J. Fracture 25, 2276-246.
- PARKS, D.M. [1974]: "A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors", Int. J. Fracture 10, 487-502.
- PARKS, D.M. [1977]: "The virtual crack extension method for nonlinear material behavior", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 12, 353-364.
- RAJU, I.S. [1987]: "Calculation of strain energy release rates with higher order and singular finite elements", Engng. Fract. Mech. 28, 251-274.
- RICE, J.R. [1965]: "An examination of the fracture mechanics energy balance from the point of view of continuum mechanics", Proc. 1st Int. Conf. on Fracture (eds. T. YOKOBORI, T. KAWASAKI and J.K. SWEDLOW), Sendai (Japan), 309-340.

RICE, J.R. [1968]: "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks", J. Appl. Mech. 35, 379-386.

RICE, J.R. [1979]: "The mechanics of quasi-static crack growth", Proc. 8th Int. Congress of Applied Mechanics (ed. R.E. KELLY), 191-216.

RICE, J.R., and ROSENGREN, G.F. [1968]: "Plane strain deformation near a crack-tip in a power-law hardening material", J. Mech. Phys. Solids 16, 1-12.

RYBICKI, E.F. and KANNINEN, M.F. [1977]: "A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral", Engng. Fract. Mech. 9, 931-938.

SIEGELE, D. [1989]: "3D crack propagation using ADINA", Computers & Structures 32, 639-645.

YUAN, H. and BROCKS, W.[1989]: "Numerical investigations on the significance of J for large stable crack growth", Engineering Fracture Mechanics 32, 459-468.